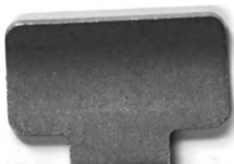
NOTE SUR UNE FORMULE DE LEIBNITZ PAR M. PLACIDE TARDY

Placide Tardy







NOTE SUR UNE FORMULE DE LEIBNITZ;

PAR M. PLACIDE TARDY,
Recteur de l'Université de Gênes.

(Extrait du *Bulletin de Bibliographie et d'Histoire des Sciences mathématiques et physiques*, publié par le prince B. Boncompagni, t. I, juin 1868.)

L'analogie qui existe entre les différentielles du produit de deux ou de plusieurs fonctions, et les puissances de leur somme a été signalée pour la première fois au public par Leibnitz, dans un Mémoire intitulé : *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de Lege Homogeneorum transcendentali*, et inséré dans le tome I des *Miscellanea Berolinensia*. Ce Mémoire ne porte aucune date; mais le volume qui le contient porte le millésime de 1710. Il a été reproduit depuis dans le tome III des *OEuvres* de Leibnitz, publiées par Louis Dutens, à Genève, en 1768. Dans ce Mémoire, l'illustre Auteur fait d'abord remarquer la correspondance entre les divers termes de la série qui représente la puissance d'un binôme $(x+y)^e$, qu'il écrit, pour rendre l'analogie sensible, sous la forme

$$p^e(x+y) = 1\,p^e x\,p^0 y + \frac{e}{1}p^{e-1}x\,p^1 y + \frac{e(e-1)}{1.2}p^{e-2}x\,p^2 y + \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3}p^{e-3}x\,p^3 y + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{1.2.3.4}p^{e-4}x\,p^4 y + \ldots,$$

et entre les termes de la différentielle

$$d^e(xy) = 1 d^e x\, d^0 y + \frac{e}{1} d^{e-1} x\, d^1 y$$
$$+ \frac{e(e-1)}{1.2} d^{e-2} x\, d^2 y + \frac{e(e-1)(e-2)}{1.2.3} d^{e-3} x\, d^3 y$$
$$+ \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{1.2.3.4} d^{e-4} x\, d^4 y + \ldots,$$

laquelle s'obtient en substituant au symbole p de la puissance le symbole d de la différentiation. Il annonce ensuite que la même analogie a lieu entre la puissance d'un polynôme, par exemple, d'un trinôme $p^e(x+y+z)$, et la différentielle du produit $d^e(xyz)$.

Toutefois, plusieurs années avant la publication des *Miscellanea Berolinensia*, Leibnitz était déjà en possession du théorème en question, et l'on trouve des traces de cette découverte dans la correspondance entre lui et Jean Bernoulli, imprimée en 1745. Dans une lettre de Leibnitz à Bernoulli du 6—16 mai 1695, on trouve la première indication de l'analogie entre les différentielles d'un produit et les puissances d'une somme, et Bernoulli, dans sa réponse (8—18 juin 1695), en louant l'élégance de ce résultat, semble presque soupçonner que l'on en peut encore tirer quelque conséquence pour les intégrales, bien qu'il déclare n'avoir pas pu examiner suffisamment la question : *Nondum satis vacavit examinare an quid inde pro summationibus elici possit.* Il indique d'ailleurs un procédé pour obtenir l'intégrale, lequel consiste à chercher une troisième proportionnelle à la différentielle de l'expression à intégrer et à l'expression elle-même, et dans lequel se trouve posé pour la première fois le principe de considérer le symbole d'opération d comme

un symbole de quantité : *Consideratis interim* d, d^2, d^3, d^4, . . ., *tanquam quantitatibus algebraicis, et non ut litteris tantummodo caracteristicis*. Et dans une lettre du 7—17 juillet 1695, il retrouve, comme application, sa célèbre série

$$\int n\,dx = nz - dn\frac{z^2}{1.2dz} + d^2n\frac{z^3}{1.2.3dz^2} - d^3n\frac{z^4}{1.2.3.4dz^3} + \ldots$$

qu'il avait déjà donnée dans les *Actes de Leipzig* de novembre 1694 ; et il se réjouit de cet accord inespéré, qui vient confirmer la justesse de sa dernière méthode, *ubi tam mirabiliter et contra omnem consuetudinem cum litteris d proceditur*. Or le procédé de Bernoulli revient au fond à dire qu'il faut prendre pour $\int n\,dz$ la série analogue à celle que donne le développement de $\frac{1}{dz+n}$ ou de $(dz+n)^{-1}$. Mais l'analogie entre les intégrales et les puissances négatives n'avait pas encore été aperçue. Leibnitz lui-même, quoique ayant déjà établi la signification du symbole d avec un indice négatif, en comparant les sommes aux racines, ne parait pas s'en être encore fait une idée nette; et la première fois qu'il énonce clairement et complétement le théorème, c'est dans un *Post-scriptum* à une lettre adressée par lui au célèbre géomètre Guillaume-François de l'Hospital, Marquis de Saint-Mesme, et datée de Hanovre, le 30 septembre (N. St.) 1695. Dans ce *Post-scriptum*, auquel il est fait allusion dans deux passages de la correspondance précitée, Leibnitz commence par donner la série de Bernoulli à la suite du développement de $p^{-1}(x+y)$; puis il fait observer que, plus généralement, de $p^e(x+y)$ on déduit $d^e(xy)$, et il ajoute

que, si e était négatif et $= -n$, d^e se changerait en $\int^n$. Il indique encore, dans le même endroit, comment l'analogie peut s'étendre au cas des indices fractionnaires, et exprimer, par exemple, $d^{\frac{1}{2}}(xy)$ au moyen d'une série infinie « quoyque cela paroisse éloigné de la Géometrie, qui ne connoist ordinairement que les differences à exposants entiers affirmatifs, ou les negatifs à l'egard des sommes, et pas encore celles, dont les exposans sont rompus ». Plus tard, Leibnitz, dans sa lettre du 20—30 octobre 1695, communiquait à Bernoulli l'application de l'analogie observée aux intégrales, et celui-ci lui demandait, dans sa réponse, ce que serait $d^m(xy)$ pour m fractionnaire ou irrationnel; à quoi Leibnitz répliquait en reproduisant ce qu'il avait écrit au Marquis de l'Hospital. D'après cela, n'est-il pas singulier que cette extension si remarquable et si bien appréciée n'avait été nullement mentionnée dans son Mémoire intitulé : *Symbolismus memorabilis*, publié tant d'années après ? Bernoulli lui-même, en recevant le volume des *Miscellanea Berolinensia*, reste frappé d'un tel silence, et le 10 décembre 1710, il lui écrit : *Quæ de symbolismo calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum habes, nondum exhauriunt omnia quæ ante has quindecim annos inter nos fuerunt agitata*, et il lui rappelle en particulier l'application qui en avait été faite aux intégrales. A quoi Leibnitz, tout en déclarant se souvenir des communications échangées entre eux, répond pour unique raison : *Symbolismus calculi algebraici et infinitesimalis dare volui simpliciter.*

Quoi qu'il en soit, en 1754, Lagrange, à peine âgé de dix-huit ans, ignorant complétement les recherches de Leibnitz sur ce sujet, adressait au Comte de Fagnano une lettre (sa première production, et la seule qu'il ait écrite en langue italienne), dans laquelle il mettait en évidence

cette analogie, comme l'avait fait précisément le grand géomètre allemand.

Arago rapporte, dans son *Éloge de Fresnel,* que Lagrange racontait qu'ayant trouvé par hasard, dans les OEuvres de Leibnitz, la formule qu'il avait regardée jusque-là comme sa découverte, il en éprouva un si profond chagrin, qu'il s'évanouit complétement, et qu'il s'en fallut même peu que dès ce jour il ne renonçât tout à fait aux études mathématiques.

Il semblerait que de nos jours bien des gens ont la fibre moins sensible.

Les premiers théorèmes de Leibnitz restèrent cependant inféconds jusqu'au jour où le même Lagrange publia, dans le volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1772, son beau Mémoire intitulé : « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables ». Là, sans faire aucune mention de sa lettre au Comte de Fagnano, il commence par reconnaître les droits de Leibnitz, et généralisant les idées, il fait voir l'analogie qui existe entre les différences finies et les puissances positives, entre les sommations et les puissances négatives. De cette manière il parvient à quelques formules symboliques très-importantes, qui, trouvées par induction, furent démontrées plus tard par Laplace, Lorgna et d'autres, et que l'on peut regarder comme le point de départ des travaux de Lorgna, d'Arbogast, de Français, de Lobatto, etc., lesquels, fécondant en quelque sorte l'idée émise par Bernoulli, ont proposé de séparer les caractéristiques des fonctions qui leur sont soumises, et de les traiter comme des symboles de quantités; et ont ainsi donné naissance au calcul moderne des opérations, cultivé spécialement par les géomètres anglais, et dont les vrais fondements furent établis par Servois.

Deux des formules particulières données par Lagrange, savoir :

$$\Delta^n y = \left[e^{\omega \left(\frac{dy}{dx}\right)} - 1 \right]^n,$$

$$\omega^n \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = [\log(1 + \Delta y)]^n,$$

dans lesquelles ω est la différence constante de x et qui sont vraies pour x positif ou négatif, furent étendues au cas de n fractionnaire dans un ouvrage intitulé : *Nuove ricerche analitiche, geometriche et meccaniche, contenenti i metodi generali della divisione, iscrizione, e circoscrizione delle figure, dedotte dalla comparazione delle serie; di* LUIGI FORNI, Professor di Matematiche della R. Scuola T. P. d'Artigleria in Pavia; Pavia, nella Tipografia Bolzani: 1811 (p. 34 et suiv.).

Le théorème de Leibnitz, qui, en désignant par D la dérivée et par $(\mu)_r$ le coefficient binomial

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-r+1)}{1.2.3\ldots r},$$

est exprimée par l'équation

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} D^\mu uv = {} & u D^\mu v + (\mu)_1 Du\, D^{\mu-1} v \\ & + (\mu)_2 D^2 u\, D^{\mu-2} v + (\mu)_3 D^3 u\, D^{\mu-3} v + \ldots, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle son auteur avait déjà prouvé que l'on pouvait faire μ fractionnaire, a été démontré vrai pour μ quelconque par M. Liouville (*Journal de l'École Polytechnique*, 21e cahier, t. XIII, 1832, p. 117 et suiv.), en partant de sa définition générale des dérivées à indices quelconques, d'après laquelle, en supposant

$$y = e^{mx},$$

on a

$$D^\mu y = m^\mu e^{mx}.$$

Dans un Mémoire présenté en 1844 au Congrès scientifique de Milan, et reproduit avec de légers changements et suppressions en 1858, dans le tome I des *Annali di Matematica pura ed applicata* du Professeur Tortolini, nous avions aussi, suivant notre point de vue, démontré que la formule (A) avait lieu pour μ quelconque.

Cette démonstration ne fut pas insérée dans les *Annali*, et aujourd'hui je vais la reproduire ici, pour répondre à la bienveillante invitation de M. le Prince Boncompagni.

La formule fondamentale que l'on obtient au moyen d'intégrations par parties successives, et que nous avions prise pour exprimer l'intégration à indice quelconque d'une fonction, peut s'écrire, d'une manière abrégée,

$$(1) \qquad \int^\mu \varphi(x)\, dx^\mu = \frac{x^\mu}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots k} \cdot \frac{x^k}{\mu+k} D^k \varphi.$$

Faisons $\varphi(x) = uv$, u et v étant des fonctions de x; nous aurons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int^\mu uv\, dx^\mu = \frac{x^\mu}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots k} \cdot \frac{x^k}{\mu+k} [u D^k v + (k)_1 Du\, D^{k-1} v + \ldots \\ + (k)_r D^r u\, D^{k-r} v + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

Or, comme le coefficient $(k)_r$ s'annule pour

$$k = 0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad r-1,$$

il est clair que nous pourrons mettre, dans le terme général, $k+r$ au lieu de k, ce qui lui donnera la forme

$$\frac{x^\mu}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k+r}}{1.2.3\ldots(k+r)} \cdot \frac{x^{k+r}}{\mu+k+r} (k+r)_r D^r u\, D^k v;$$

multiplions et divisons par

$$\mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1),$$

et observons que

$$\mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1)\Gamma(\mu)=\Gamma(\mu+r),$$

$$\frac{(k+r)_r}{1.2.3\ldots(k+r)}=\frac{1}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots r},$$

$$\frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+r-1)}{1.2.3\ldots r}=(-1)^r(-\mu)_r.$$

Le terme se réduira par là à

$$(-\mu)_r \mathrm{D}^r u \, \frac{x^{\mu+r}}{\Gamma(\mu+r)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{x^k}{\mu+r-k}.\mathrm{D}^k v,$$

et par l'équation (1) elle-même, il est égal à

$$(-\mu)_r \mathrm{D}^r u \int^{\mu+r} v\, dx^{\mu+r}.$$

En substituant donc dans (2), il viendra

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \int^\mu uv\, dx^\mu = u\int^\mu v\, dx^\mu + (-\mu)_1 \mathrm{D}u\int^{\mu+1} v\, dx^{\mu+1} + \ldots \\ + (-\mu)_r \mathrm{D}^r u\int^{\mu+r} v\, dx^{\mu+r} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir que cette formule est encore vraie pour μ négatif, en substituant le symbole d au symbole $\int$ affecté d'un indice négatif. Soit, en effet, τ un nombre positif quelconque, mais tel que l'on ait

$$\mu+\tau=p,$$

p étant entier, et soit r le plus grand entier contenu dans τ; en prenant la dérivée d'ordre p de la formule (3), il viendra

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^\tau uv = {} & u\mathrm{D}^\tau v + (p)_1 \mathrm{D}u \mathrm{D}^{\tau-1} v + \ldots \\ & + (p)_r \mathrm{D}^r u \mathrm{D}^{\tau-r} v + (p)_{r-1} \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\, dx^{r+1-\tau} + \ldots \\ & + (-\mu)_1 \mathrm{D}_u \mathrm{D}^{\tau-1} v + \ldots + (-\mu)_1 (p)_{r-1} \mathrm{D}^r u \mathrm{D}^{\tau-r} v + (-\mu)_1 (p)_r \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\, dx^{r+1-\tau} + \ldots \\ & + (-\mu)_2 (p)_{r-2} \mathrm{D}^r u \mathrm{D}^{\tau-r} v + (-\mu)_2 (p)_{r-1} \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\, dx^{r+1-\tau} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (-\mu)_r \mathrm{D}^r u \mathrm{D}^{\tau-r} v + (-\mu)_r (p)_1 \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\, dx^{r+1-\tau} + \ldots \\ & + (-\mu)_{r+1} \mathrm{D}^{r+1} u \int^{r+1-\tau} v\, dx^{r+1-\tau} + \ldots. \end{aligned}$$

Mais, par une propriété connue des coefficients binomiaux, on a

$$(p)_1 + (-\mu)_1 (p)_{r-1} + (-\mu)_2 (p)_{r-2} + \ldots + (-\mu)_r$$
$$= (p-\mu)_r = (\tau)_r,$$

donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{D}^\tau uv = {} & u\,\mathrm{D}^\tau v + (\tau)_1\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}^{\tau-1}v \\ & + (\tau)_2\,\mathrm{D}^2 u\,\mathrm{D}^{\tau-2}v + \ldots + (\tau)_r\,\mathrm{D}^r u\,\mathrm{D}^{\tau-r}v \\ & + (\tau)_{r+1}\,\mathrm{D}^{r+1}u \int^{r+1-\tau} v\,dx^{r+1-\tau} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons conclure de là que la forme de Leibnitz pour la dérivée d'un produit subsiste pour un indice quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2[e] série. t. VIII; 1869.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

